数据的机器级表述

王慧妍
why@nju.edu.cn

南京大学 计算机科学与技术系 计算机软件研究所

提醒

- PA
  - PA1 今晚23:59:59截止
  - PA2：
    PA 2.1: 2022年10月23日 (此为建议的不计分 deadline)
    PA 2.2: 2022年11月06日 (此为建议的不计分 deadline)
    PA 2.3: 2022年11月13日 23:59:59 (以此 deadline 计按时提交奖励分)
- Lab
  - Lab1即将截止
    Deadline: 2022年10月16日

本讲概述

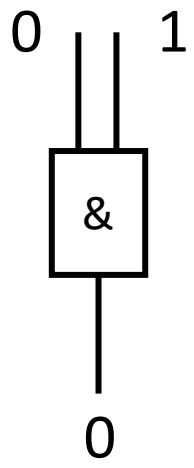
我们已经知道数据是如何在计算机中表示的。但为什么要这样表示？这样的表示有什么好处和用法？

- 位运算与单指令多数据
- 整数溢出与 Undefined Behavior
- IEEE754 浮点数

位运算与单指令多数据

为什么会有位运算

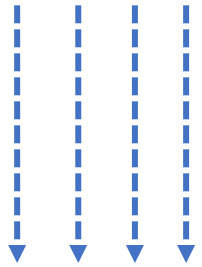
- 逻辑门和导线是构成计算机 (组合逻辑电路) 的基本单元
  - 位运算是用电路最容易实现的运算
    - & (与), | (或), ~ (非)
    - ^ (异或)
    - << (左移位), >> (右移位)



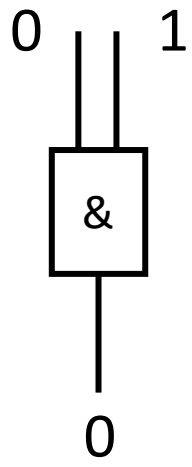
位运算与逻辑电路密不可分

a -> 0 1 0 1　　5

b -> 0 1 1 0　　10



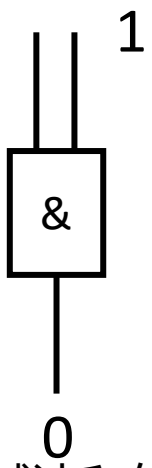
a & b -> 0 1 0 0　　8



加法呢?

为什么会有位运算

- 逻辑门和导线是构成计算机 (组合逻辑电路) 的基本单元
  - 位运算是用电路最容易实现的运算
    - & (与), | (或), ~ (非)
    - ^ (异或)
    - << (左移位), >> (右移位)



  - 例子：一代传奇处理器 8-bit MOS 6502
    - 3510 晶体管；56 条指令，算数指令仅有加减法和位运算

Instructions by Name

ADC .... add with carry
AND .... and (with accumulator)
ASL .... arithmetic shift left
BCC .... branch on carry clear
BCS .... branch on carry set
BEQ .... branch on equal (zero set)
BIT .... bit test
BMI .... branch on minus (negative set)
BNE .... branch on not equal (zero clear)
BPL .... branch on plus (negative clear)
BRK .... break / interrupt

BVC .... branch on overflow clear
BVS .... branch on overflow set
CLC .... clear carry
CLD .... clear decimal
CLI .... clear interrupt disable
CLV .... clear overflow
CMP .... compare (with accumulator)
CPX .... compare with X
CPY .... compare with Y
DEC .... decrement
DEX .... decrement X
DEY .... decrement Y

为什么会有位运算

- 逻辑门和导线是构成计算机 (组合逻辑电路) 的基本单元
  - 位运算是用电路最容易实现的运算
    - & (与), | (或), ~ (非)
    - ^ (异或)
    - << (左移位), >> (右移位)
  - 例子：一代传奇处理器 8-bit MOS 6502
    - 3510 晶体管；56 条指令，算数指令仅有加减法和位运算
  - 数学上自然的整数需要实现成固定长度的 01 字符串
- 习题：用上述位运算和常数实现 4 位整数的加法运算/Lab1
  - 加法比上述运算在电路上实现 fundamentally 更困难 (为什么？)
    - “Circuit Complexity”

整数：固定长度的 Bit String

- 142857 -> 0000 0000 0000 0010 0010 1110 0000 1001
  - 假设 32-bit 整数；约定 MSB 在左，LSB 在右

- 热身问题：字符串操作
  - 分别取出 4 个字节

x: 5 -> 0101

(x>>1)&1

~~010~~ &
001
0

怎么取出来？

x: 0000 0000 0000 0010 0010 1110 0000 1001

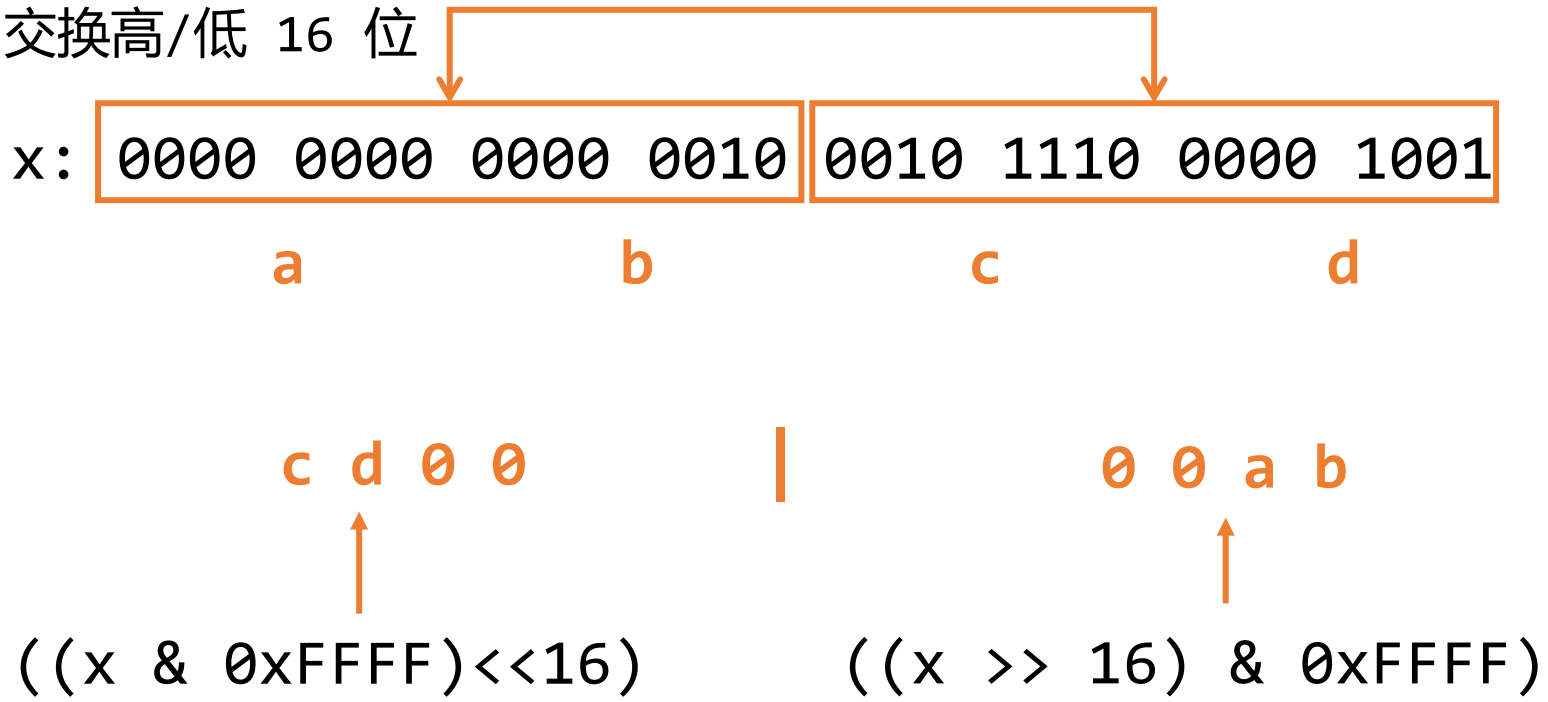
(x>>16)&0xFF

x&0xFF

整数：固定长度的 Bit String

- 142857 -> 0000 0000 0000 0010 0010 1110 0000 1001
  - 假设 32-bit 整数；约定 MSB 在左，LSB 在右

- 热身问题：字符串操作
  - 交换高/低 16 位



单指令多数据

`&, |, ~, ...` 对于整数里的每一个 bit 来说是独立（并行）的

- 如果我们操作的对象刚好每一个 bit 是独立的
  - 我们在一条指令里就实现了多个操作
  - SIMD (Single Instruction, Multiple Data)

- 例子：Bit Set
  - 32-bit 整数 $x \to S \subseteq \{0, 1, 2, 3, \ldots, 31\}$
  - 位运算是对所有 bit 同时完成的
    - C++ 中有 bitset，性能非常可观

`5 -> 0101`　　S: {0,2}

Bit Set: 基本操作

- 测试 $x \in S$
  - `(S >> x) & 1`

```
5 -> 0101 -> S: {0,2}
S
```

- 求 $S' = S \cup \{x\}$
  - `S | (1 << x)`

```
0101 | (0001 << 1)
0101 | 0010 -> 0111
```

- 更多习题
  - 求 $|S|$
  - 求 $S_1 \cup S_2$， $S_1 \cap S_2$
  - 求 $S_1 \setminus S_2$
  - 遍历 S中的所有元素（foreach）

```
S1: {0,2}, S2: {1,2}
   0101    0110
   |: 0111
   &: 0100
S1 \ S2: 0001
```

0	0	0
1	1	0
0	1	0
1	0	1

`S1 & (~S2)`

Bit Set: 求 $|S|$ (S二进制表示有多少个1)

- 测试 $x \in S$
  - `(S >> x) & 1`

`5 -> 0101 -> S: {0,2}`

```
int bitset_size(uint32_t S) {
   int n = 0;
   for (int i = 0; i < 32; i++) {
       n += bitset_contains(S, i);
   }
   return n;
}
```

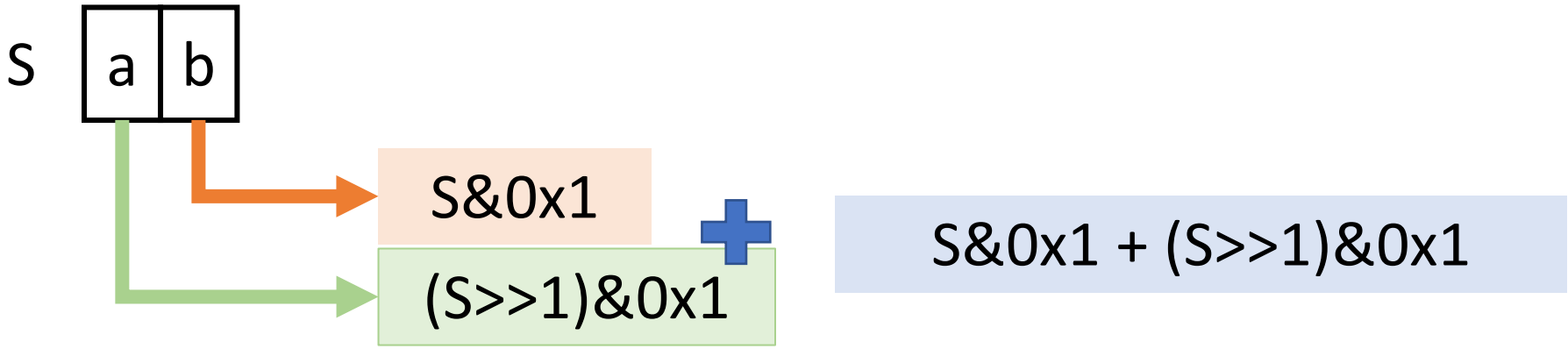
Bit Set: 求 $|S|$ (S二进制表示有多少个1)

```
int bitset_size(uint32_t S) {
   int n;
   for (int i = 0; i < 32; i++) {
      n += bitset_contains(S, i);
   }
   return n;
}
```

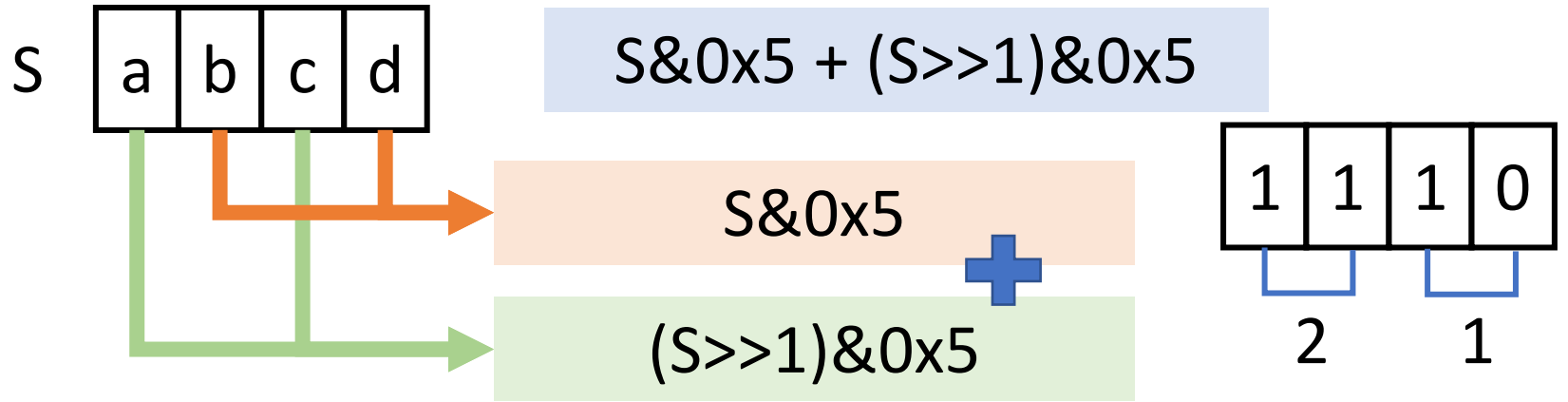
```
int bitset_size1(uint32_t S) { // SIMD
   S = (S & 0x55555555) + ((S >> 1) & 0x55555555);
   S = (S & 0x33333333) + ((S >> 2) & 0x33333333);
   S = (S & 0x0F0F0F0F) + ((S >> 4) & 0x0F0F0F0F);
   S = (S & 0x00FF00FF) + ((S >> 8) & 0x00FF00FF);
   S = (S & 0x0000FFFF) + ((S >> 16) & 0x0000FFFF);
   return S;
}
```

Bit Set: 求 $|S|$ (S二进制表示有多少个1)

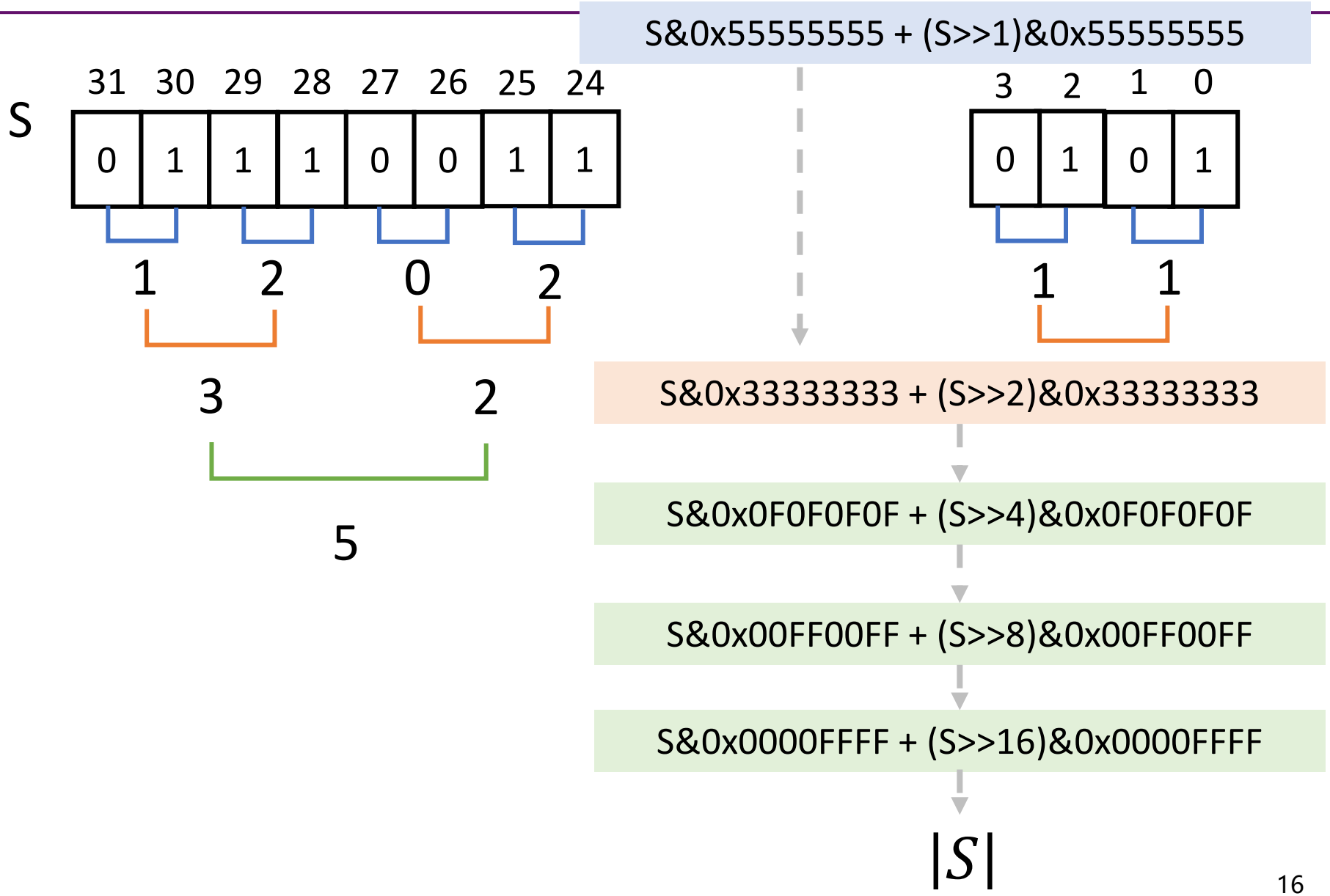
- S: 0b10 → $S = \{1\}$



- S: 0b1110 → $S = \{1,3\}$



Bit Set: 求 $|S|$ (S二进制表示有多少个1)



Bit Set: 求 $|S|$ (S二进制表示有多少个1)

```
int bitset_size(uint32_t S) {
   int n;
   for (int i = 0; i < 32; i++) {
      n += bitset_contains(S, i);
   }
   return n;
}
```

```
int bitset_size1(uint32_t S) { // SIMD
   S = (S & 0x55555555) + ((S >> 1) & 0x55555555);
   S = (S & 0x33333333) + ((S >> 2) & 0x33333333);
   S = (S & 0x0F0F0F0F) + ((S >> 4) & 0x0F0F0F0F);
   S = (S & 0x00FF00FF) + ((S >> 8) & 0x00FF00FF);
   S = (S & 0x0000FFFF) + ((S >> 16) & 0x0000FFFF);
   return S;
}
```

遍历 S中的元素

```
x=5 -> 0101
```

0101：x^(1<<0)

0100：x^(1<<2)

- Lowbit：找到最右边的1
  - x^lowbit(x)

  - **x & -x**
    - **这是怎么来的?**

Bit Set: 返回 $S \neq \emptyset$ 中的某个元素

- 有二进制数x = 0b+++++100，我们希望得到最后那个100
  - 想法：使用基本操作构造一些结果，能把+++++的部分给抵消掉

表达式	结果
x	0b+++++100
x-1	0b+++++011
~x	0b-----011
~x+1	0b-----100

- 一些有趣的式子：
  - x & (x-1) → 0b+++++000; x ^ (x-1) → 0b00000111;
  - x & (~x+1) → 0b00000100 (lowbit)
    - **x & -x**, (~x & (x-1))+ 1 都可以实现lowbit
    - 只遍历存在的元素可以加速求$|S|$

Lowbit: x&-x

- 无符号整数
  - 32位整数：0x0 ~ 0xFFFFFFFF（32个1）

- 带符号整数
  - 原码表示法：最高位为符号位
  - 补码表示法（普遍采用）：各位取反末位加一
    - 用加法来实现减法

```
x  = 0b+++++100
-x = 0b-----011+0b1 = 0b-----100
```

x&-x：0b00000100 → lowbit

Bit Set：求$\lfloor \log_2(x) \rfloor$

- 等同于31−$\mathrm{clz}(x)$

```
int clz(uint32_t x) {
    int n = 0;
    if (x <= 0x0000ffff) n += 16, x <<= 16;
    if (x <= 0x00ffffff) n += 8, x <<= 8;
    if (x <= 0x0fffffff) n += 4, x <<= 4;
    if (x <= 0x3fffffff) n += 2, x <<= 2;
    if (x <= 0x7fffffff) n ++;
    return n;
}
```

x：0x00000001	16
x：0x00010000	24
x：0x01000000	28
x：0x03000000	30
$S = \{0\}$	31

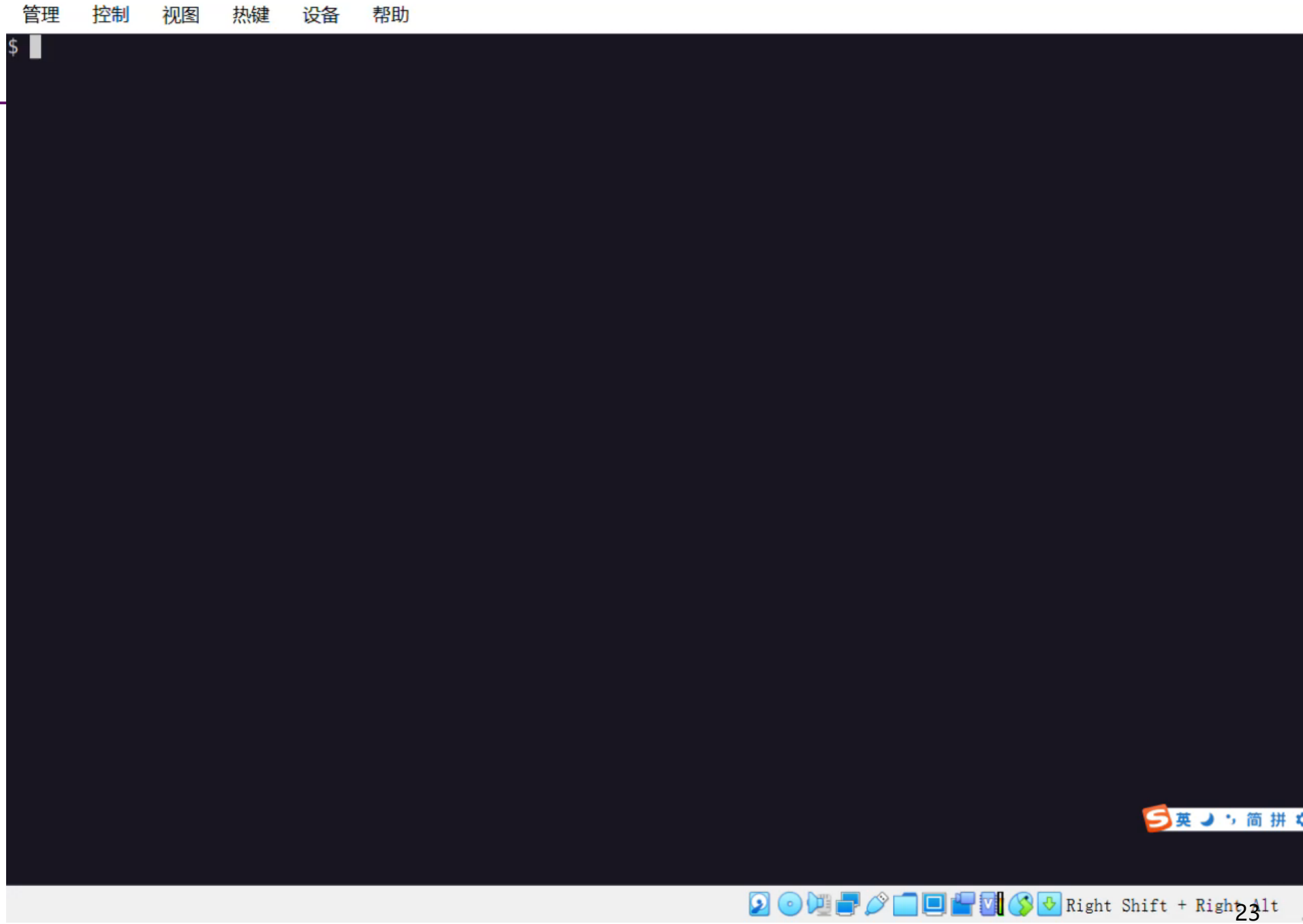
- （奇怪的代码）假设x是lowbit的结果？

```
#define LOG2(x) \
    ("-01J2GK-3@HNL;-=47A-IFO?M:<6-E>95D8CB"[(x) % 37] - '0')
```

Bit Set：求$\lfloor \log_2(x) \rfloor$ (cont'd)

- 用一点点元编程（meta-programming）；试一试log2.c

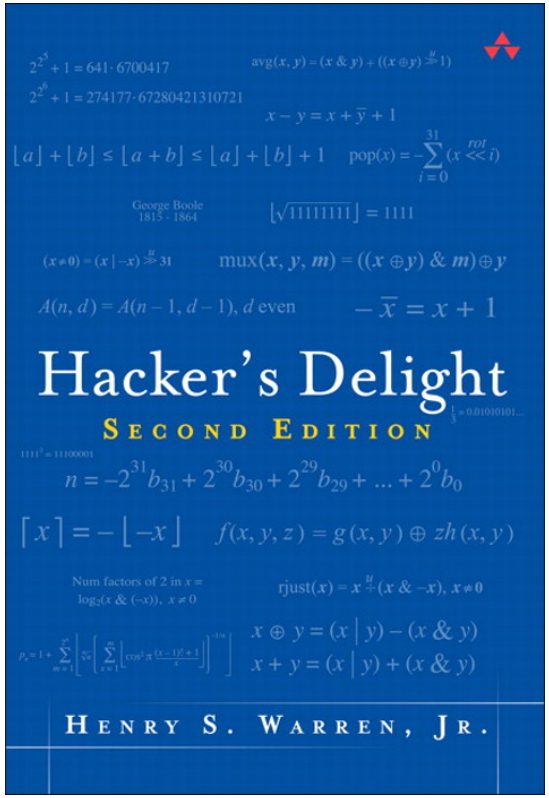
```
import json

n, base = 64, '0'
for m in range(n, 10000):
    if len({ (2**i) % m for i in range(n) }) == n:
        M = { j: chr(ord(base) + i)
              for j in range(0, m)
                  for i in range(0, n)
                      if (2**i) % m == j }
        break

magic = json.dumps(''.join(
    [ M.get(j, '-') for j in range(0, m) ]
    )).strip('"')

print(f'#define LOG2(x) ("{magic}"[(x) % {m}] - \'{base}\')')
```


管理
控制
视图
热键
设备
帮助
$
Right Shift + Right Alt

一本有趣的参考书

Henry S. Warren, Jr. *Hacker's Delight* (2ed), Addison-Wesley, 2012.

- 让你理解写的更快的代码并不是“瞎猜”
  - 主要内容是各种数学（带来的代码优化）
  - 官方网站：hackersdelight.org
  - 见识一下真正的“奇技淫巧”



整数溢出与 Undefined Behavior

Undefined Behavior (UB)

Undefined behavior (UB) is the result of executing computer code whose behavior is not prescribed by the language specification to which the code adheres, for the current state of the program. This happens when the translator of the source code makes certain assumptions, but these assumptions are not satisfied during execution. -- Wikipedia

- C对UB的行为是不做任何约束的，把电脑炸了都行
  - 常见的 UB：非法内存访问 (空指针解引用、数组越界、写只读内存等)、被零除、有符号整数溢出、函数没有返回值……
    - 通常的后果比较轻微，比如 wrong answer, crash

为什么 C/C++ 会有 UB?

- 为了尽可能高效 (zero-overhead)
  - 不合法的事情的后果只好 undefined 了
  - Java, js, python, ... 选择所有操作都进行合法性检查

- 为了兼容多种硬件体系结构
  - 有些硬件 `/0` 会产生处理器异常
  - 有些硬件啥也不发生
  - 只好 undefined 了

Undefined Behavior: 一个历史性的包袱

- 埋下了灾难的种子
  - CVE: *Common Vulnerabilities and Exposures*，公开发布软件中的漏洞
    - buffer/integer overflow 常年占据 CVE 的一席之地
    - 高危漏洞让没有修补的机器立马宕🐧/变成肉🐧
- 例子：CVE-2018-7445 (RouterOS), 仅仅是忘记检查缓冲区大小……

```
while (len) {
    for (i = offset; (i - offset) < len; ++i) {
        dst[i] = src[i+1];
    }
    len = src[i+1]; ...
    offset = i + 1;
}
```

Undefined Behavior: 警惕整数溢出

表达式	值
`UINT_MAX+1`	0
`INT_MAX+1; LONG_MAX+1`	undefined
`char c = CHAR_MAX; c++;`	varies (???)
`1 << -1`	undefined
`1 << 0`	1
`1 << 31`	undefined
`1 << 32`	undefined
`1 / 0`	undefined
`INT_MAX % -1`	undefined

- W. Dietz, et al. Understanding integer overflow in C/C++. In *Proceedings of ICSE*, 2012.

整数溢出和编译优化

```
int f() { return 1 << -1; }
```

- 根据手册，这是个UB，于是clang这样处置

```
0000000000000000 <f>:
   0:   c3      retq
```

- 编译器把这个计算直接删除了

W. Xi, et al. Towards optimization-safe systems: Analyzing the impact of undefined behavior. In *Proceedings of SOSP*, 2013.

  - `if(UB==0) yes; else if(UB!=0) no; //???`

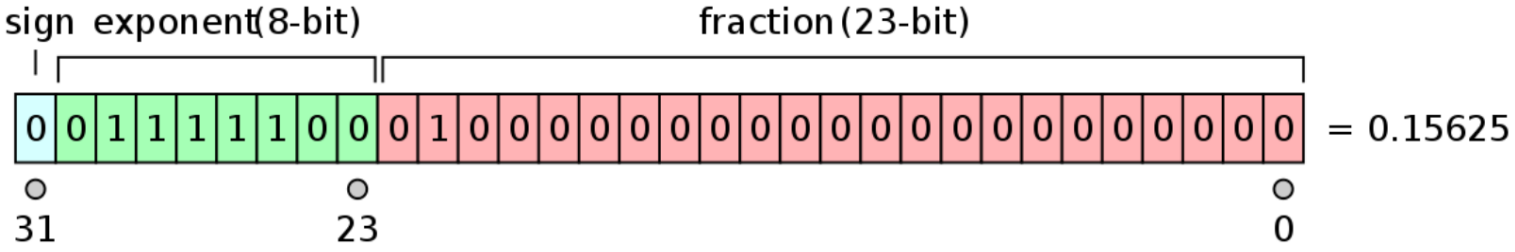
浮点数：IEEE 754

实数的计算机表示

- 实数非常非常多
  - 只能用32/64-bit 01串来表述一小部分实数
    - 确定一种映射方法，把一个01串映射到一个实数
      - 运算起来不太麻烦
      - 计算误差不太可怕

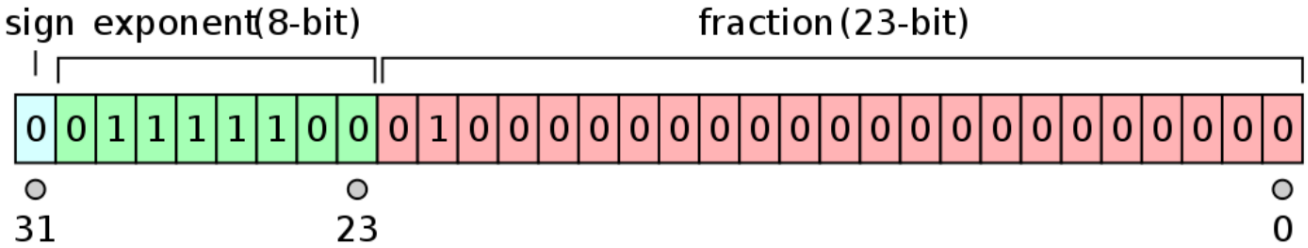
- 于是有了IEEE754
  - 1bit S, 23/53bits Fraction (尾数), 8/11bits Exponent (阶码),

$$x = (-1)^S \times (1.F) \times 2^{E-B}$$



实数的计算机表示

$$x = (-1)^S \times (1.F) \times 2^{E-B}$$



$(-1)^0 \times 1.01_2 \times 2^{124-127}$

$1.01_2 \times 2^{-3}$

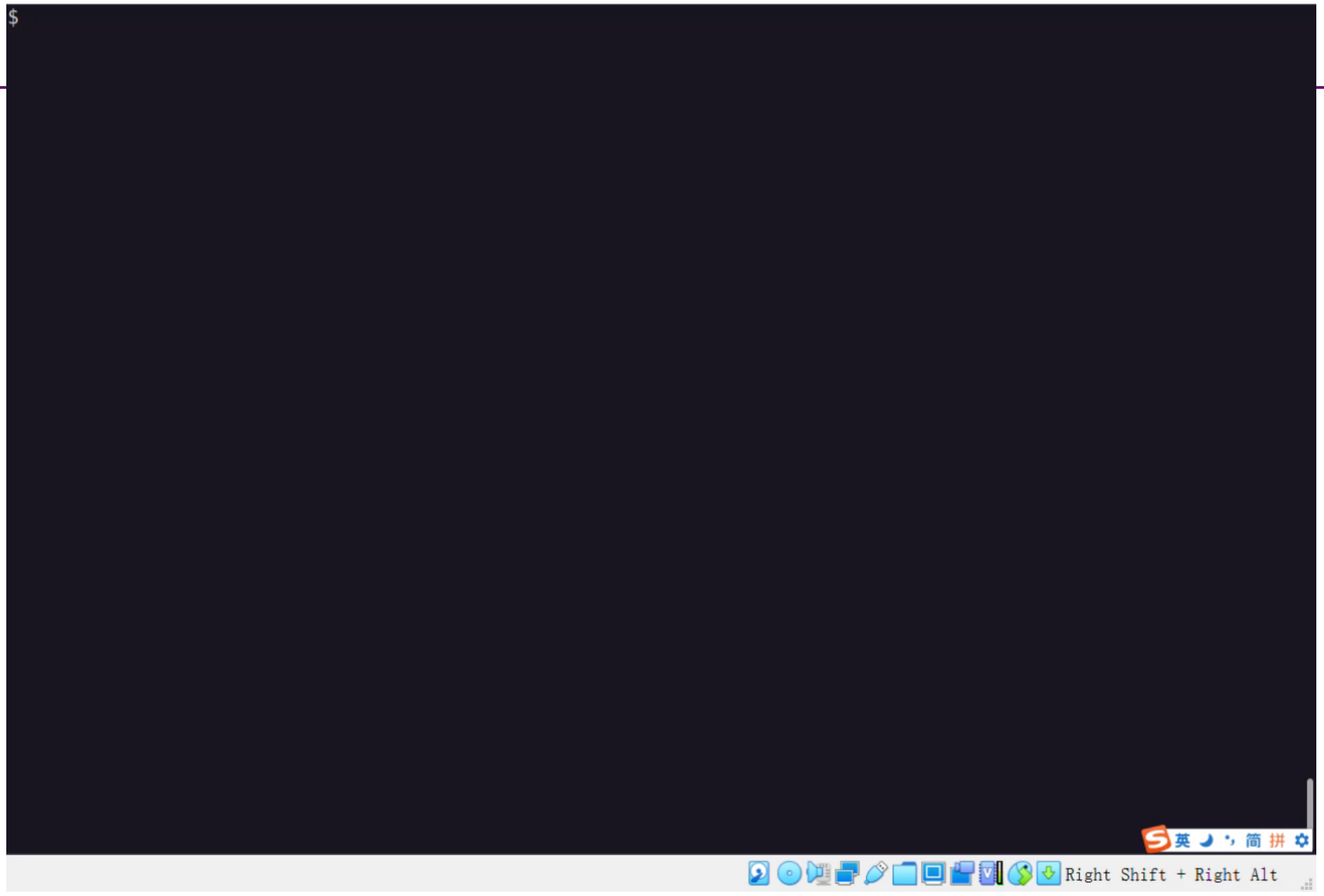
0.00101_2

$0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5}$

0.15625

IEEE754: 你有可能不知道的事实

- 一个有关浮点数大小/密度的实验(float.c)
- 越大的数字，距离下一个实数的距离就越大
  - 可能会带来相当的绝对误差
  - 因此很多数学库都会频繁做归一化


管理 控制 视图 热键 设备 帮助
$
英 简 拼
Right Shift + Right Alt

IEEE754: 你有可能不知道的事实

- 一个有关浮点数大小/密度的实验(float.c)
- 越大的数字，距离下一个实数的距离就越大
  - 可能会带来相当的绝对误差
  - 因此很多数学库都会频繁做归一化

  - $1.00000000000000000000000_2 \times 2^{24}$
    - 16,777,216
  - $1.00000000000000000000001_2 \times 2^{24}$
    - 16,777,218

IEEE754: 你有可能不知道的事实

- 一个有关浮点数大小/密度的实验(float.c)
- 越大的数字，距离下一个实数的距离就越大
  - 可能会带来相当的绝对误差
  - 因此很多数学库都会频繁做归一化

- 例子：计算$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{n}$

```
#define SUM(T, st, ed, d) ({ \
    T s = 0; \
    for (int i = st; i != ed + d; i += d) \
        s += (T)1 / i; \
    s; \
})
```

管理 控制 视图 热键 设备 帮助

```c
#define SUM(T, st, ed, d) ({ \
  T s = 0; \
  for (int i = st; i != ed + d; i += d) \
    s += (T)1 / i; \
  s; \
})

#define n 1000000

int main(){
  printf("%.16f\n", SUM(float, 1, n, 1));
  printf("%.16f\n", SUM(float, n, 1, -1));
  printf("%.16f\n", SUM(double, 1, n, 1));
  printf("%.16f\n", SUM(double, n, 1, -1));
}

```

~/Documents/ICS2021/teach/sum.c[1] [c] unix utf-8 Ln 1, Col 1/16

Right Shift + Right Alt

IEEE754: 你可能不知道的事实 (cont'd)

- 比较
  - `a == b` 需求谨慎判断（要假设自带ε）
  - 浮点数：$(a+b)+c \neq a+(b+c)$
- 非规格化数 (`Exponenent == 0`)
  - $x = (-1)^S \times (0.F) \times 2^{-126}$
- 零
  - `+0.0,-0.0`的Sbit是不一样的，但`+0.0 == -0.0`
- `Inf/NaN (Not a Number)`
  - `Inf`: 浮点数溢出很常见，不应该作为undefined behavior
  - `NaN(0.0/0.0)`: 能够满足x!=x表达式的值

IEEE754：异常复杂

- 除了$x = (-1)^S \times (1.F) \times 2^{E-B}$，还要考虑
  - 非规格化数, +0.0/-0.0, Inf, NaN
    - 一度引起了硬件厂商的众怒 (碰到非规格数干脆软件模拟吧)
    - 很多“对浮点数精度要求不高”硬件厂商选择不兼容 IEEE 754 (比如各种 GPU 制造商)
    - Nvidia 从 Fermi 才开始完整支持 IEEE754 (2010)

An interview with the old man of floating-point.
Reminiscences elicited from William Kahan by Charles Severance.

例子：计算$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- 如果考虑比较极端的数值条件?
  - 消去误差： $-b$ v.s. $\sqrt{b^2-4ac}$ (catastrophic cancellation)
    - 还记得 x + 1.0 == x的例子吗
  - 溢出： b^2

- 一个更好的一元二次方程求根公式
  - $\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{(-b)+\sqrt{b^2-4ac}}/2a = \frac{4ac}{(-b)+\sqrt{b^2-4ac}}/2a \ (b<0)$
  - $\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\cdot\frac{1}{2a} \ (0 \le b \le 10^{127})$
  - $-\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ (b > 10^{127})$
    - P. Panchekha, et al. Automatically improving accuracy for floating point expressions. In *Proc. of PLDI*, 2015.

凭什么?

It looked pretty complicated. On the other hand, we had a rationale for everything. -- William Kahan, 1989 ACM Turing Award Winner for his *fundamental contributions to numerical analysis*.

浮点数可以直接当成整数比较大小

+0.0/-0.0和Inf保证$(1/x)/x$不会发生sign shift

……

- IEEE754天才的设计保证了数值计算的稳定
  - 如果想了解IEEE754，请阅读D. Goldberg. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys*, 23(1), 1991.

数据的机器级表示：综合案例

案例：计算$1/\sqrt{x}$

- 应用：Surface Norm
  - 平面的法向量
    - 用于计算光照/反射
    - ~~第一次感觉数学派上了用场~~
  - 计算方法
    - 幂级数展开
    - 二分法
    - 牛顿法……

- 如何不借助硬件指令，快速（近似）计算$f(x)$?
  - 人眼对像素级的误差并不敏感，因此算错一点也没事
  - 快1.5倍：$640 \times 480 \rightarrow 800 \times 600$（这个推导并不严格）

神奇的$O(1)$代码

```
float Q_rsqrt( float number ) {
    union { float f; uint32_t i; } conv;
    float x2 = number * 0.5F;
    conv.f = number;
    conv.i = 0x5f3759df - ( conv.i >> 1 ); // ???
    conv.f = conv.f * ( 1.5F - ( x2 * conv.f * conv.f ) );
    return conv.f;
}
```

- 看看别人的毕业设计
  - Matthew Robertson. A Brief History of InvSqrt, *Bachelor Thesis, The University of New Brunswick*, 2012.

案例：计算$(a \times b) \bmod m$

```
int64_t multimod_fast(int64_t a, int64_t b, int64_t m) {
    int64_t x = (int64_t)((double)a * b / m) * m;
    int64_t t = (a * b - x) % m;
    return t < 0 ? t + m : t;
}
```

- 令$a \times b = p \cdot m + q$
  - $a \star b \rightarrow (p \cdot m + q) \bmod 2^{64}$
  - x $\rightarrow \left(\left\lfloor \frac{p \cdot m + q}{m} \right\rfloor \cdot m\right) \bmod 2^{64}$
    - 如果浮点数的精度是无限的， $x = (p \cdot m) \bmod 2^{64}$
    - 同余就得到了q

总结

数据的机器级表示

- *Everything* is a bit-string!
  - 但是却能玩出很多花样来
    - bit-set/SIMD
    - 浮点数的表示

- PA：禁止写出不可维护的代码
  - 如果你想玩出花来，请做合适的封装和充分的测试

End.

recap：自我管理git

重装系统了？

虚拟机崩溃了？

环境配置出问题了？

PA2导读

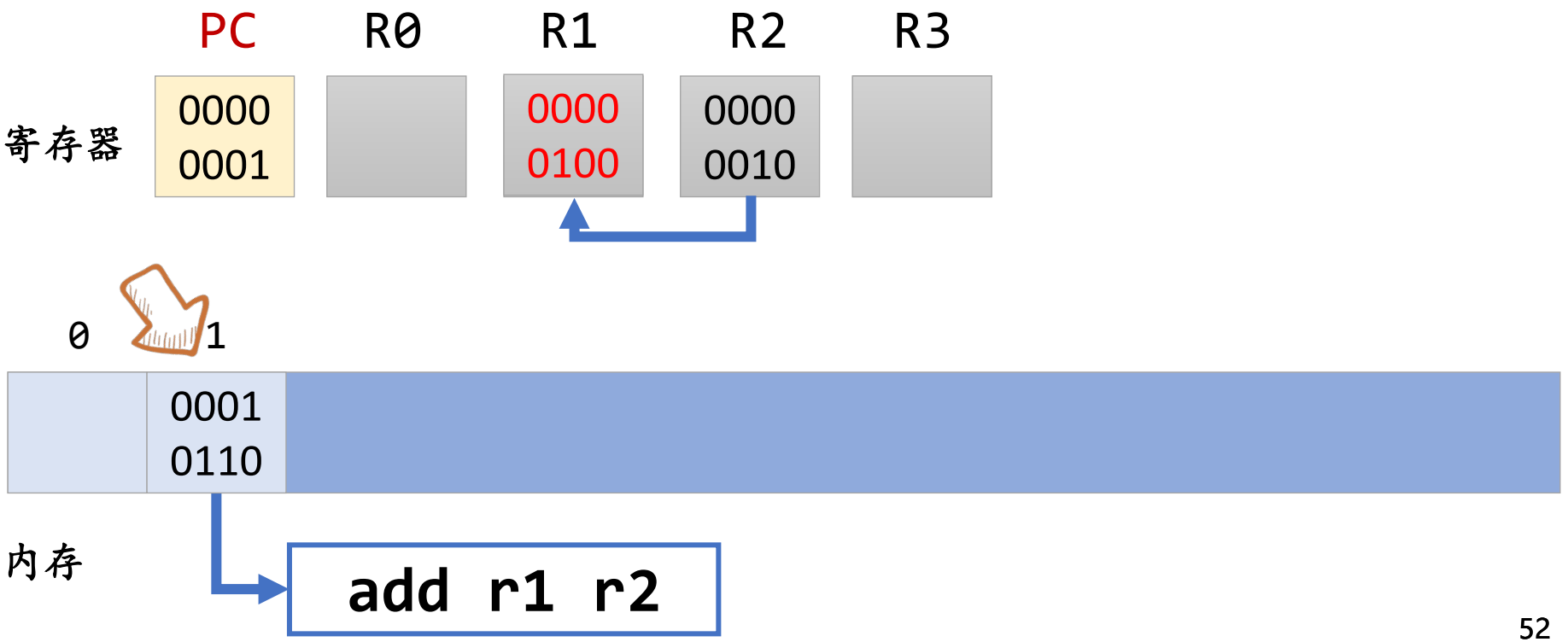
Lab1和PA2接踵而至

教科书第一章上的 “计算机系统”

存储系统and指令集

寄存器：PC，RO (RA)，R1，R2，R3 (8-bit)
内存：16字节（按字节访问）

	7 6 5 4	3 2 1 0
mov	[0 0 0 0]	[rt][rs]
add	[0 0 0 1]	[rt][rs]
load	[1 1 1 0]	[addr]
store	[1 1 1 1]	[addr]



```c
#include <stdint.h>
#include <stdio.h>

#define NREG 4
#define NMEM 16

// 定义指令格式
typedef union {
  struct { uint8_t rs : 2, rt : 2, op : 4; } rtype;
  struct { uint8_t addr : 4      , op : 4; } mtype;
  uint8_t inst;
} inst_t;

#define DECODE_R(inst) uint8_t rt = (inst).rtype.rt, rs = (inst).rtype.rs
#define DECODE_M(inst) uint8_t addr = (inst).mtype.addr

uint8_t pc = 0;       // PC, C语言中没有4位的数据类型, 我们采用8位类型来表示
uint8_t R[NREG] = {}; // 寄存器
uint8_t M[NMEM] = {   // 内存, 其中包含一个计算z = x + y的程序
  0b11100110,  // load  6#     | R[0] <- M[y]
  0b00000100,  // mov   r1, r0 | R[1] <- R[0]
  0b11100101,  // load  5#     | R[0] <- M[x]
  0b00010001,  // add   r0, r1 | R[0] <- R[0] + R[1]
  0b11110111,  // store 7#     | M[z] <- R[0]
  0b00010000,  // x = 16
  0b00100001,  // y = 33
  0b00000000,  // z = 0
};
```

```c
int halt = 0; // 结束标志

// 执行一条指令
void exec_once() {
  inst_t this;
  this.inst = M[pc]; // 取指
  switch (this.rtype.op) {
  //  操作码译码        操作数译码            执行
    case 0b0000: { DECODE_R(this); R[rt]   = R[rs];   break; }
    case 0b0001: { DECODE_R(this); R[rt]  += R[rs];   break; }
    case 0b1110: { DECODE_M(this); R[0]    = M[addr]; break; }
    case 0b1111: { DECODE_M(this); M[addr] = R[0];    break; }
    default:
      printf("Invalid instruction with opcode = %x, halting...\n", this.rtype.op);
      halt = 1;
      break;
  }
  pc ++; // 更新PC
}

int main() {
  while (1) {
    exec_once();
    if (halt) break;
  }
  printf("The result of 16 + 33 is %d\n", M[7]);
  return 0;
}
```